

文章编号: 1000-7598-(2006) 增-0259-05

基于不同屈服准则均布条形荷载下塑性区的确定

李顺群¹, 王英红³, 王学志²

(1. 天津城市建设学院 土木工程系, 天津 300384; 2. 辽宁工学院 土木建筑系, 锦州 121001; 3. 辽宁工学院 信息科学与工程学院, 锦州 121001)

摘 要: 为了合理确定条形荷载下临塑荷载和塑性区的范围, 在考虑侧压力系数不等于 1 的情况下, 提出了两类方法。一类仍旧采用 Mohr-Coulomb 准则, 但假设侧压力系数随倾角线性变化; 另一类在假设侧压力系数随倾角线性变化的基础上采用 3 种不同的广义 Mises 准则。算例分析结果表明: 第 1 类方法虽然合理减小了正应力, 但仍没有考虑中主应力, 结果导致得出的塑性区大于原 Mohr-Coulomb 准则法得出的结果; 第 2 类方法得出的 3 种塑性区形状相似, 其中基于外角外接 Mohr-Coulomb 等边不等角六锥体的广义 Mises 准则得出的临塑荷载与传统方法结果相似, 但塑性区要小一些。因此, 这种方法可以用来更合理地估算条形荷载下的塑性区和承载力。

关 键 词: 地基承载力; Mohr-Coulomb 准则; 广义 Mises 准则; 侧压力系数

中图分类号: TU 470

文献标识码: A

Determination of the plastic zone under band-distributed-load based on diverse yield criteria

LI Shun-qun¹, WANG Ying-hong³, WANG Xue-zhi²

(1. Tianjin Institute of Urban Construction, Department of Civil Engineering, Tianjin 300384, China; 2. Department of Civil Engineering, Liaoning Institute of Technology, Jinzhou 121001, China; 3. School of Information Science & Engineering, Liaoning Institute of Technology, Jinzhou 121001, China)

Abstract: The method employed to determine the plastic critical load and plastic zone is based on Mohr-Coulomb criterion and a hypothesis that the coefficient of the lateral earth pressure is unit along inclination. It is found that the settlement obtained by this method is larger than the actual situation. Considering change of coefficient of lateral earth pressure along inclination, two methods are constructed to determine the plastic critical load and plastic zone. One is based on Mohr-Coulomb criterion and the other is based on three generalized Mises criterions. The computational results show that even the normal stresses are reasonably cut down the plastic zone from the first proposed method is larger than that from the present employed method for ignoring the intermediate principle stress. The shapes of the plastic zone obtain from three different criterions adopted in proposed method are similar. The plastic critical load, gain from the generalized Mises criterion whose circle is circumscribe to the exterior angle of Mohr-Coulomb's scalene hexagon, is almost equal to that got by the present employed method, but the corresponding plastic zone is smaller.

Key words: bearing capacity; Mohr-Coulomb criterion; generalized Mises criterion; coefficient of lateral earth pressure

1 引 言

临塑荷载是地基中刚出现剪切破坏时的 p 值, 极限荷载是指地基整体失稳破坏时的荷载。显然, 采用临塑荷载作为地基承载力偏于保守, 地基发生局部剪切破坏后只要塑性区不超出某一限度, 就不会影响建筑物的安全和正常使用。因此, 合理确定临塑荷载和 p 大于临塑荷载时的塑性区就成为一

个重要课题。目前条形地基均布荷载作用下临塑荷载和塑性区的确定是基于 Mohr-Coulomb 准则得出的^[1,2], 不但忽略了中主应力的影响, 而且还作了很大简化, 比如假设侧压力系数 k 沿各个方向均为 1。

本文提出了两种确定塑性区的方法: 第 1 种方法基于 Mohr-Coulomb 准则, 但考虑侧压力系数的变化; 第 2 种方法基于不同参数的广义 Mises 准则, 同时也考虑侧压力系数的变化。

收稿日期: 2006-7-15

基金项目: 辽宁省教育厅科学研究计划资助 (No.2004F105)。

作者简介: 李顺群, 男, 1971 年生, 博士, 副教授, 主要从事土力学基本理论与非饱和土力学等方面的研究, E-mail: lishunqun@sina.com。

2 屈服准则

Tresca 准则: 该理论假设当最大剪应力达到某一极限值 C_1 时, 材料屈服, 即

$$\begin{aligned} & [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4C_1^2][(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4C_1^2] \cdot \\ & [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4C_1^2] = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Mises 准则: 认为当广义剪应力或偏应力张量第 2 不变量达到某一值时材料屈服, 即

$$J_2 = C_2 \quad (2)$$

Mohr-Coulomb 准则: 该准则认为, 当任一面上的剪应力达到下式时材料屈服:

$$\tau_n = c - \sigma_n \tan \varphi \quad (3)$$

因此, Mohr-Coulomb 准则也没有考虑中间主应力。以上各准则在主应力空间中如图 1 所示。

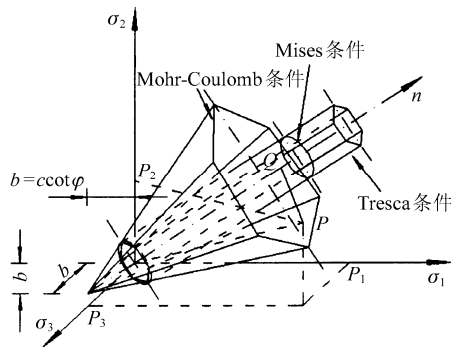


图 1 各种常用的屈服准则
Fig.1 Relationship among diverse yield criteria

广义 Mises 准则: 在对传统塑性力学改造的基础上, 产生了广义塑性力学^[3]。传统塑性力学屈服函数可以写成应力张量不变量的形式:

$$F = F_1(I_1) + F_2(J_2, \theta_\alpha) \quad (4)$$

岩土材料除了剪切屈服外还可以存在体积屈服, 即球应力导致屈服。过某一点, 存在两个屈服面: 剪切屈服面, 是判断 J_2 方向上是否达到屈服的条件; 体积屈服面, 是判断 I_1 方向上是否达到屈服的条件。

广义 Mises 准则是在 Mises 准则的基础上考虑平均应力 σ_m 或中主应力的影响, 其表达式为

$$\sqrt{J_2} = K + \alpha I_1 \quad (5)$$

式中 $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, 此式较 Mises 准则增加了应

力张量第 1 不变量的影响, 几何图形在偏平面上仍然是圆, 在子午面上为两条对称于等倾线的斜直线。在偏平面上, 当广义 Mises 圆截线内切于 Mohr-Coulomb 准则六边形时有

$$a = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}; \quad K = \frac{\sqrt{3}c \cos \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}} \quad (6)$$

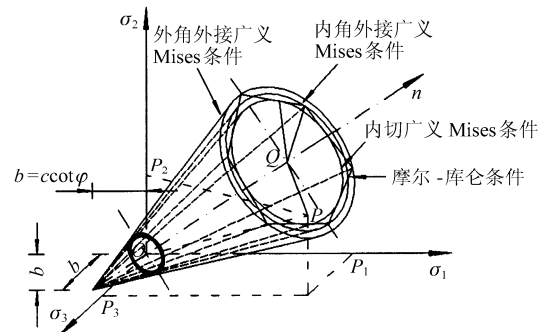
当外接于 Mohr-Coulomb 准则内角时有

$$a = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}; \quad K = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}} \quad (7)$$

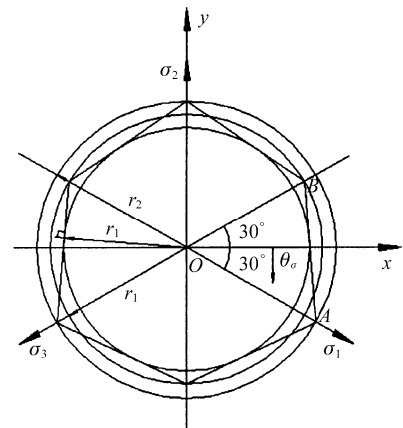
当外接于 Mohr-Coulomb 准则外角时有

$$a = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3 - \sin^2 \varphi}}; \quad K = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3(3 - \sin^2 \varphi)}} \quad (8)$$

设某地基土有关参数 $c = 15 \text{ kPa}$, $\varphi = 20^\circ$, 则 Mohr-Coulomb 屈服面和相应的 3 种广义 Mises 屈服面以及它们在偏平面上的截线可以计算得到, 如图 2 所示, 其中 r_1 、 r_2 和 r_3 分别为外角外接、内角外接和内切广义 Mises 圆锥面在偏平面上截圆的半径, θ_σ 为应力罗德角。



(a) 在主应力空间中



(b) 在偏平面上

图 2 广义 Mises 准则与 Mohr-Coulomb 准则的关系
Fig.2 Relationship between generalized Mises criterion and Mohr-Coulomb criterion

3 k 变化时的 Mohr-Coulomb 准则法

条形荷载作用下,地基中一点的应力包括:(1)基础底面的附加压力 p ; (2)基础以下深度 z 的土重压力 γz ; (3)由基础埋深 h 构成的旁载 γh 。

其基本假设为:(1)土体是弹塑性材料;(2)土体均匀各向同性;(3)破坏符合 Mohr-Coulomb 准则;(4)侧压力系数 k 随倾角线性变化,假设 $\theta = 0^\circ$ 时沿竖直方向 $k = 1$,水平方向侧压力系数为 k_0 ,则任一角度下的 k 为

$$k = 1 - (1 - k_0) \frac{2|\theta|}{\pi} \quad (9)$$

设作用于地基上的条形均布荷载为 p ,如图 3 所示。根据弹性理论不难得到地基中任一点由 p 产生的最大和最小主应力分别为^[1, 2, 4]

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{p - \gamma h}{\pi} (2\beta \pm \sin 2\beta) \quad (10)$$

式中: γ 为土的重度; h 为基础埋深。不考虑(2)、(3)两项在 σ_1 和 σ_3 方向产生的剪应力,故 3 部分产生的主应力之和应用叠加原理得到

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{p - \gamma h}{\pi} (2\beta \pm \sin 2\beta) + \frac{k_1}{k_3} (z + h) \gamma \quad (11)$$

式中: k_1 和 k_3 分别为沿 σ_1 和 σ_3 方向的侧压力系数,由于 k_1 、 k_3 方向相差 $\pi/2$,所以有

$$k_1 + k_3 = 1 + k_0, \quad k_1 - k_3 = (1 - k_0) \left(1 - \frac{4|\theta|}{\pi} \right) \quad (12)$$

式中 θ 为大主应力与垂直方向的夹角,即

$$\theta = \alpha + \beta \quad (13)$$

当达到极限平衡时,根据 Mohr-Coulomb 准则有

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2c \cot \varphi} \quad (14)$$

式中 φ 和 c 分别为土的内摩擦角和黏聚力。将式(11)和式(12)代入式(14)整理后得到

$$z = \frac{\frac{p - \gamma h}{\pi} (2\sin 2\beta - 4\beta \sin \varphi)}{[\sin \varphi (k_1 + k_3) - (k_1 - k_3)] \gamma} + \frac{\gamma h [(k_1 - k_3) - \sin \varphi (k_1 + k_3)] - 2c \cos \varphi}{[\sin \varphi (k_1 + k_3) - (k_1 - k_3)] \gamma} \quad (15)$$

当假设沿各方向的侧压力系数是 1 时便得到土

力学中广泛使用的公式^[1]

$$z = \frac{p - \gamma h}{\pi \gamma} \left(\frac{\sin 2\beta}{\sin \varphi} - 2\beta \right) - \frac{c}{\gamma} \cot \varphi - h \quad (16)$$

确定了式(15)中有 α 、 β 、 z 三个未知数,就确定了塑性区的范围,为此需要补充方程。由图 3 可得到相关量之间的几何关系为

$$z = \frac{AB}{\sin 2\beta} \cos \alpha \cos(\alpha + 2\beta) \quad (17)$$

即为塑性区的控制方程。两方程有 3 个未知数,但只有两个独立。给定荷载条件和土质条件可以唯一确定塑性区边界。

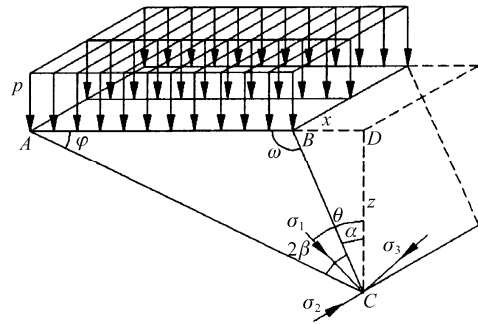


图 3 条形均布荷载下地基任一点处的主应力
Fig.3 Principal stresses acting on soil under band-uniformly-distributed-load

4 广义 Mises 屈服准则法

地基中任一点的应力组成同上,基本假设第(3)条改为破坏准则符合广义 Mises 准则,其他不变。地基中任一点由 P 产生的最大和最小主应力仍为式(11),而 k_1 和 k_3 仍存在关系式(12)。此时需要考虑中主应力的影响,根据广义 Hooke 定律有^[4]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} - \frac{3\nu}{E} \sigma_m \delta_{ij} \quad (18)$$

在条形荷载作用下,地基变形是平面应变,故

$$\sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (19)$$

式中: σ_1 和 σ_3 在平面 ABC 内; σ_2 垂直于平面 ABC 。在平面 ABC 内同样存在几何关系式(17)。由屈服准则式(5)~(8)、物理方程式(19)与(12)、几何方程式(17)即可确定塑性区的范围和发展过程。

5 求解方法

两类方法解题思路相同,可以通过编程得到结果。 $z = 0$ 处的角度 2β 可以这样确定:将 $z = 0$ 代入

式 (17), 欲使取值有意义, 必须满足:

$$\cos(\alpha + 2\beta) = 0 \quad (20)$$

故 $\alpha + \beta = \pi/2$, 代入式 (15) 或 (5) 并同样令在 $z=0$ 时得到关于 2β 的方程。用数值方法可以确定 2 个介于 $0 \sim 180^\circ$ 的 2β , 此二值就是 2β 的取值范围。在 2β 取值范围内取一系列值, 根据方程式 (15) 和式 (17) 或式 (5) 和式 (17) 可以求出相应的 z 和 α , 将各 2β 对应的 α 、 z 相连, 可得到塑性区。

6 算例及讨论

某条形地基宽 $AB=1.5$ m, 有关参数为 $k_0=0.5$, $\nu=0.3$, $c=15$ kPa, $\varphi=20^\circ$, $\gamma=20$ kN/m³, $h=0$ 即荷载作用于地表。基于各种方法的塑性区计算结果如图 4~8 所示。

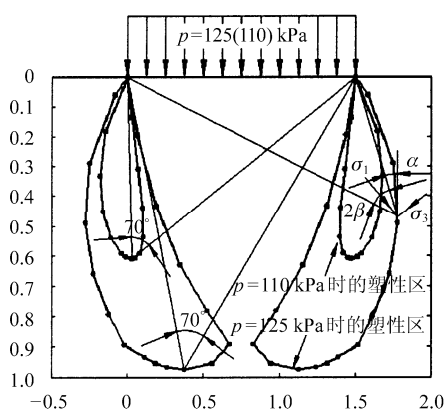


图 4 侧压力系数为 1 时基于 Mohr-Coulomb 准则的塑性区
Fig.4. Plastic zones based on Mohr-Coulomb criterion with taking k as unit

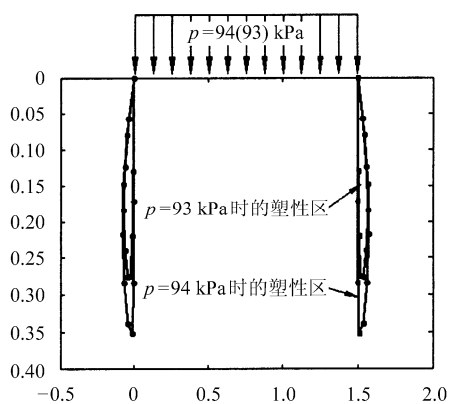


图 5 侧压力系数 $k_0=0.5$ 基于 Mohr-Coulomb 准则的塑性区
Fig.5 Plastic zones based on Mohr-Coulomb criterion with taking k_0 as 0.5

比较两种 Mohr-Coulomb 准则法确定的塑性区后可以发现: (1) 本文所确定的塑性区深度比传统

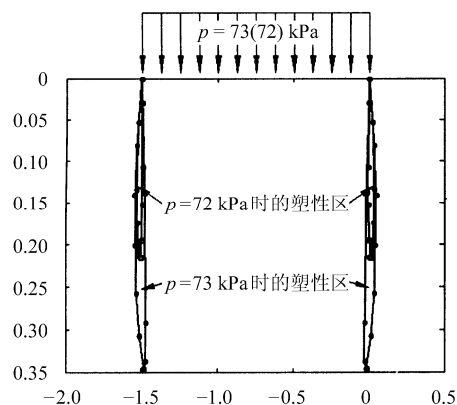


图 6 基于内切广义 Mises 准则的塑性区
Fig.6 Plastic zones based on generalized Mises criterion inscribed inner Mohr-Coulomb's scalene hexagon

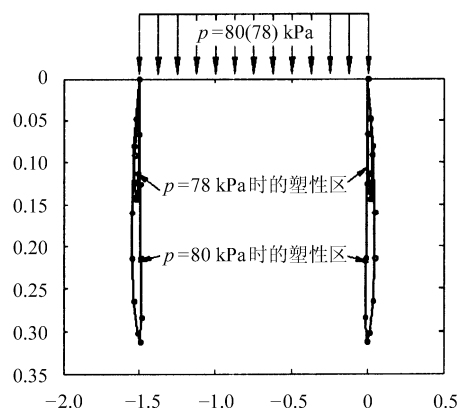


图 7 基于内角外接广义 Mises 准则的塑性区
Fig.7 Plastic zones based on generalized Mises criterion circumscribe to interior angle of Mohr-Coulomb's scalene hexagon

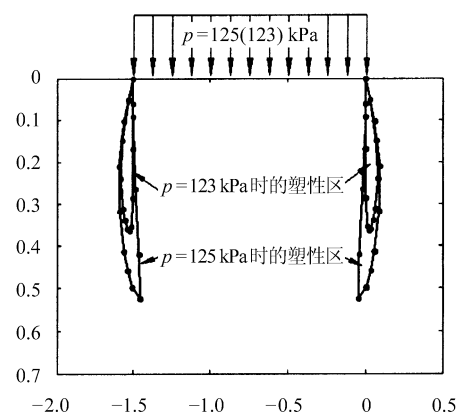


图 8 基于外角外接广义 Mises 准则的塑性区
Fig.8 Plastic zones based on generalized Mises criterion circumscribe to exterior angle of Mohr-Coulomb's scalene hexagon

方法稍深。这是因为剪切破坏时的剪应力由正应力的大小决定, 而考虑侧压力系数变化时的正应力要小于不考虑侧压力系数变化时的正应力。(2) 两种方法确定的塑性区形状存在差别。文献方法确定的

塑性区在荷载较小时呈棒形, 荷载较大时则呈月牙形, 而本法确定的塑性区形状狭窄且随荷载增大宽度基本保持不变。(3) 本法所确定的两个塑性区相对独立, 随荷载增大连体趋势不明显, 而文献方法确定的塑性区随荷载增大迅速连成一体。(4) 文献方法得到的塑性区底端的 2β 角对任何满足塑性的荷载均相等, 对于本文此角度为 70° ; 本法得到的塑性区底端的 2β 随荷载增加逐渐减小。

考虑 k 变化时基于广义 Mises 法确定的条形地基塑性区与传统法确定的塑性区存在以下差别:

(1) 在确定临塑荷载和塑性区大小时, 3 种广义 Mises 法之间存在明显差别。采用内切广义 Mises 准则时塑性区在很小荷载下就已出现; 采用外接内角广义 Mises 准则时塑性区也比 Mohr-Coulomb 准则法出现得早; 而采用外接外角广义 Mises 准则时塑性区几乎与 Mohr-Coulomb 准则法同时出现, 但塑性区面积要小。(2) 塑性区出现后的发展趋势与传统方法的发展趋势不一样, 本法得出的塑性区在荷载增加时主要向下发展, 两侧塑性区连为体的趋势不明显。(3) 采用广义 Mises 准则时, 从地基两侧开始出现塑性区到塑性区迅速向下扩展只需很小的荷载增量。这可能是由于本法考虑了地基处于三维应力状态的缘故。(4) 广义 Mises 法的塑性区小于 Mohr-Coulomb 准则法的结果, 因此, 采用外接外角广义 Mises 准则估算的沉降量要小于 Mohr-Coulomb 准则法的结果。由于基于 Mohr-

Coulomb 准则法得出的沉降量往往大于实际, 因此, 可以考虑用外角外接广义 Mises 准则估算地基沉降量。

7 结 论

根据弹性理论, 在考虑侧压力系数变化的条件下分别导出了基于 Mohr-Coulomb 准则和广义 Mises 准则的条形地基塑性区的控制方程, 根据方程可以确定给定条件下塑性区的范围、发展趋势和应力状态。本文对于合理确定地基的极限荷载和塑性区, 以及合理确定地基沉降具有理论意义。

参 考 文 献

- [1] Soil Mechanics work Team at Hohai University. Soil Mechanics[M]. Beijing: China Communications Press, 2004.7.
- [2] Muni B. Soil Mechanics & Foundations[M]. [s. l.]: John Wiley and Sons, 1999.
- [3] 郑颖人. 岩土塑性力学的新进展—广义塑性力学[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(1): 1—10.
ZHENG Ying-ren. New development of geotechnical plastic mechanics — generalized plastic mechanics[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 25(1): 1—10.
- [4] Poulos H G, Davis E H. Elastic Solution for Soil and Rock Mechanics[M]. [s. l.]: John Wiley and Sons, 1994.